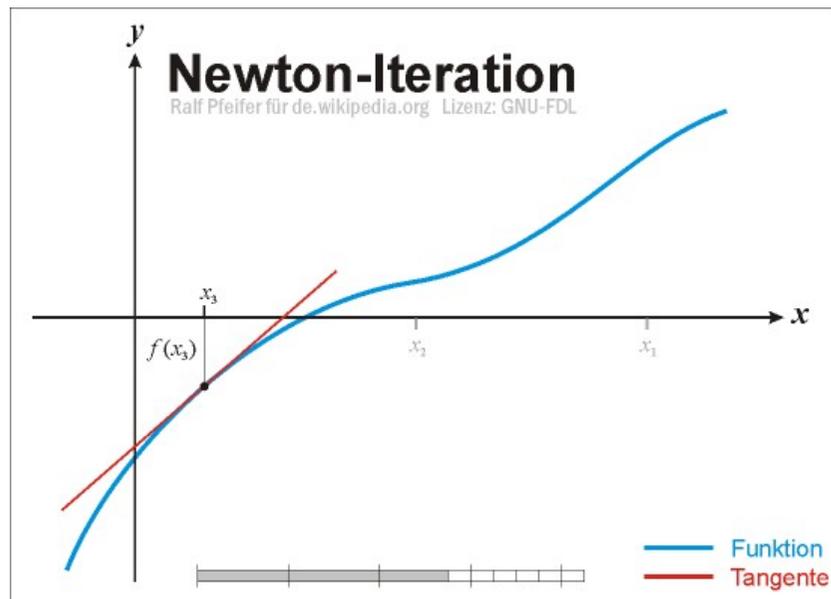


Das Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren beschreibt ein iteratives Verfahren zur numerischen Lösung nichtlinearer Gleichungen. Es wird häufig zur Nullstellenberechnung von Gleichungen eingesetzt, benötigt aber immer einen möglichst genauen Startwert.

Das Verfahren nähert eine beliebige Funktion um einen Startwert durch ihre Tangente an. Diese Näherung nennt sich Linearisierung der Funktion (um einen Punkt x_0). Die Tangente verläuft in der Nähe des Punktes ähnlich wie die tatsächliche Funktion. Die Nullstelle der Tangente (Gerade) lässt sich sehr einfach berechnen. Da die Tangente ähnlich wie die tatsächliche Funktion in einem gewissen Bereich verläuft liegt die Nullstelle der Tangente in der Nähe der tatsächlichen Nullstelle und dient als Startwert für den nächsten Iterationsschritt. Auf diese Weise lässt sich die tatsächliche Nullstelle beliebig genau bestimmen unter der wichtigen Voraussetzung, dass der Startwert bereits in der Nähe der Nullstelle liegt. Ist diese Voraussetzung verletzt stimmt die Annahme, dass die Nullstelle der Tangente eine gute Näherung der Nullstelle der Funktion darstellt, nicht mehr.



Mathematische Beschreibung

Mathematisch wird die Tangente einer Funktion im Punkt $(x | f(x))$ durch die Gleichung $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ beschrieben. Die Nullstelle dieser Tangenten liegt bei $t(x) = 0$, also

$0 = f(x_0) + f'(x_0)x - f'(x_0)x_0$. Dieses nach x aufgelöst ergibt

$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Wenn dieses neue x also Startwert der nächsten

Iteration sein soll kann man daraus folgende Iterationsvorschrift aufstellen:

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Liegt nun der Startwert x_0 nahe genug an der

tatsächlichen Nullstelle, so verbessert sich die Genauigkeit der Näherung in jedem Iterationsschritt. Dieses Verfahren muss so lange wiederholt werden, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Programmierung in C#

Um dieses Verfahren möglichst sauber und wieder verwendbar zu implementieren bietet es sich an, die Funktion und ihre Ableitung jeweils als Methode zu implementieren. Für das Verfahren an sich bietet sich eine weitere Methode an, welche dann die Funktion wie auch die Ableitung der Funktion aufrufen kann. Die Methode „Newton-Verfahren“ braucht als Übergabewert mindestens einen Startwert für das Verfahren. Je nach Wahl des Abbruchkriteriums braucht sie hierfür einen weiteren Parameter. Der Rückgabewert der Newton-Verfahren-Methode sollte dann die möglichst genaue numerische Lösung der Nullstelle sein.

Aufgabe:

- Überlege dir mögliche Abbruchkriterien
- Programmiere das Verfahren, gebe jeden Zwischenschritt in einer Tabelle (zB ListBox) aus.
- Sichere dein Verfahren vor Endlosschleifen bei schlechten Startwerten.